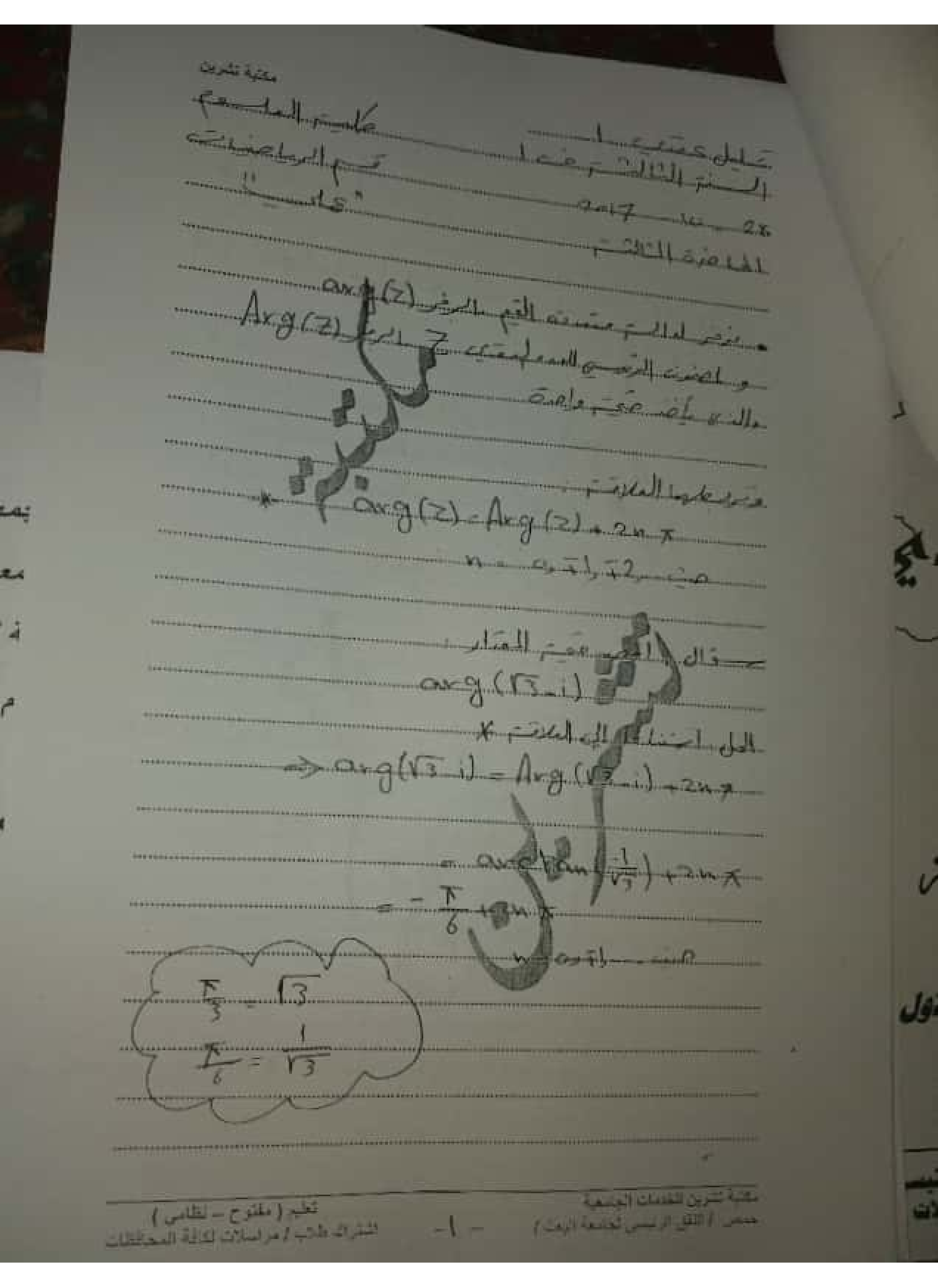


تحليل عقدي 1 — قسم الرياضيات

السنة الثالثة

2017

المحاضرة الثالثة

نرمز لمجموعة القيم الرئيسية $arg(z)$ وللقيمة الرئيسية المعرفة $Arg(z)$ بالرمز $Arg(z)$ والتي يأخذ قيمة واحدة

ونعطى بالعلاقة:

* $arg(z) = Arg(z) + 2n\pi$

حيث $n = 0, \mp 1, \mp 2, \dots$

مثال: أوجد قيمة المقدار

$arg(\sqrt{3} - i)$

الحل: استناداً إلى العلاقة *

$\Rightarrow arg(\sqrt{3} - i) = Arg(\sqrt{3} - i) + 2n\pi$

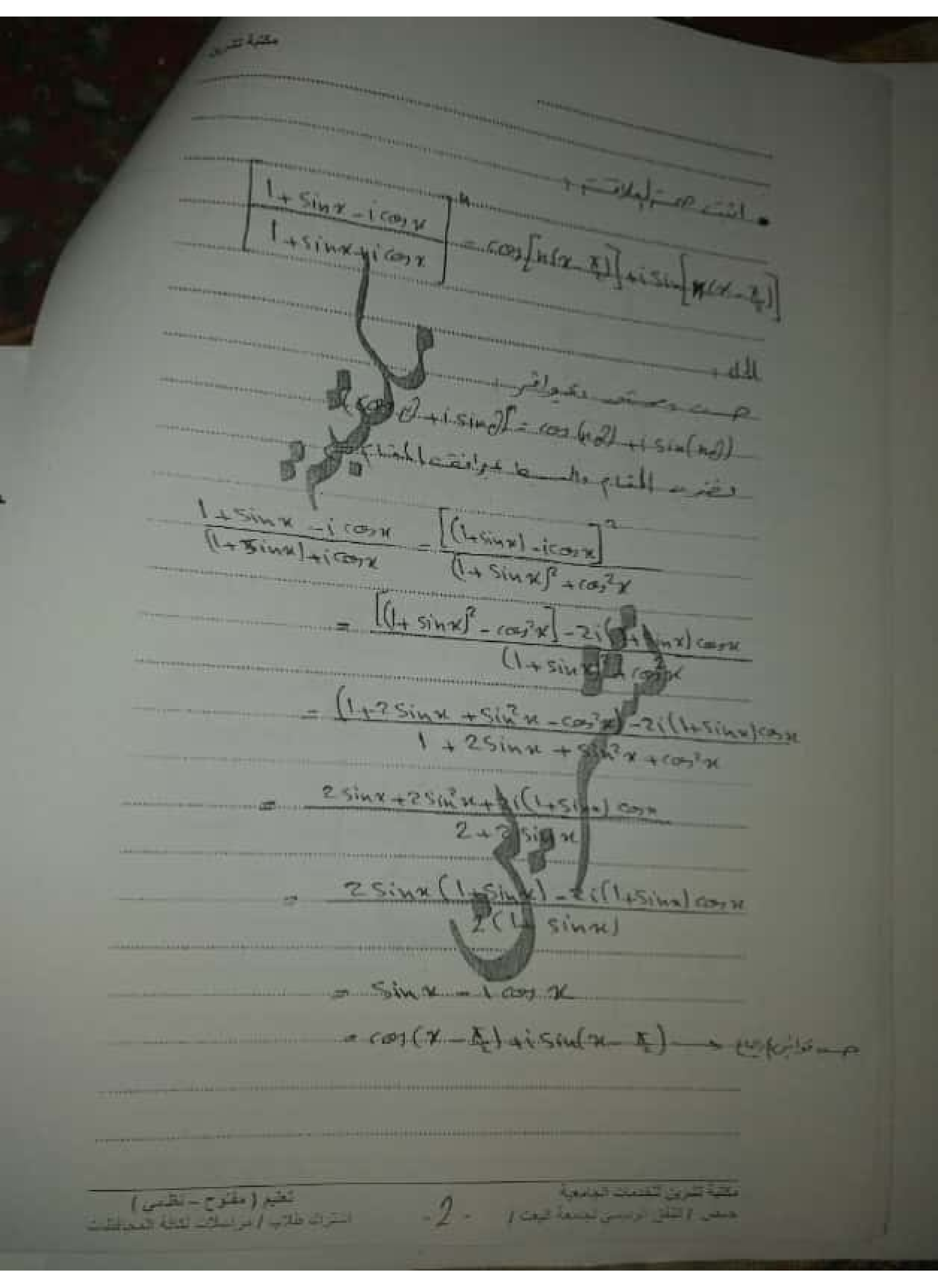
$= \arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) + 2n\pi$

$= -\frac{\pi}{6} + 2n\pi$

حيث $n = 0, \mp 1, \dots$

$\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$



• اثبت صحة العلاقة :

$$\left[\frac{1+\sin x - i\cos x}{1+\sin x + i\cos x}\right]^n = \cos\left[n\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right] + i\sin\left[n\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

الحل :

حسب مبرهنة ديموافر :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

نضرب المقام والبسط بمرافق المقام

$$\frac{1+\sin x - i\cos x}{(1+\sin x)+i\cos x} = \frac{\left[(1+\sin x) - i\cos x\right]^2}{(1+\sin x)^2+\cos^2 x}$$

$$= \frac{\left[(1+\sin x)^2 - \cos^2 x\right] - 2i(1+\sin x)\cos x}{(1+\sin x)^2+\cos^2 x}$$

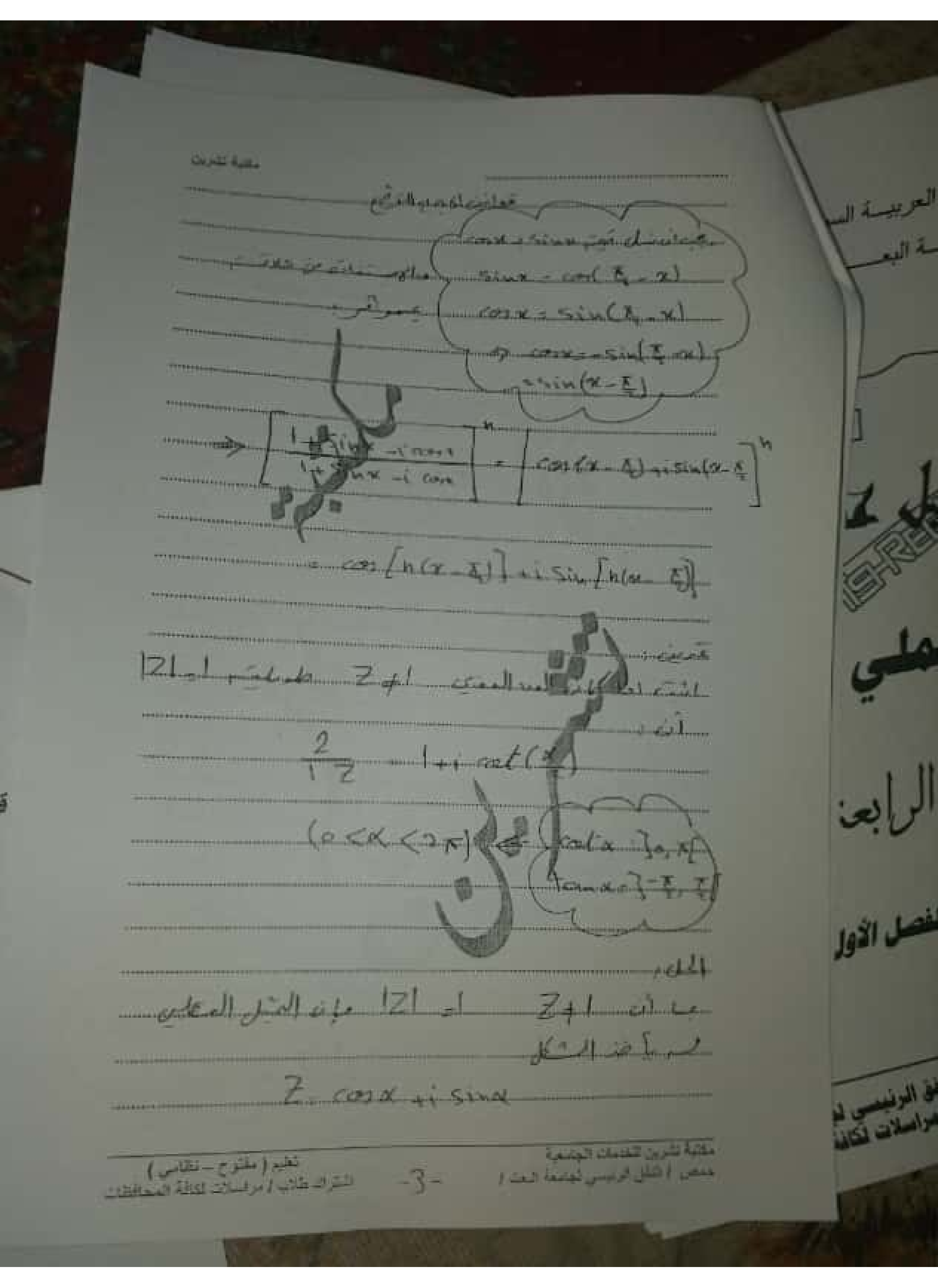
$$= \frac{(1+2\sin x + \sin^2 x - \cos^2 x) - 2i(1+\sin x)\cos x}{1+2\sin x+\sin^2 x+\cos^2 x}$$

$$= \frac{2\sin x + 2\sin^2 x - 2i(1+\sin x)\cos x}{2+2\sin x}$$

$$= \frac{2\sin x(1+\sin x) - 2i(1+\sin x)\cos x}{2(1+\sin x)}$$

$$= \sin x - i\cos x$$

$$= \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow$$ حسب مبرهنة ديموافر



[illegible]

[illegible] $\cos x$ ، $\sin x$

$\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$

$\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$

$\Rightarrow \cos x = -\sin(\frac{\pi}{2} - x)$

$= \sin(x - \frac{\pi}{2})$

$$\Rightarrow \left[\frac{1 + \sin x - i\cos x}{1 + \sin x - i\cos x}\right]^n = \left[\cos(x - \frac{\pi}{2}) + i\sin(x - \frac{\pi}{2})\right]^n$$

$$= \cos\left[n(x - \frac{\pi}{2})\right] + i\sin\left[n(x - \frac{\pi}{2})\right]$$

تمرين:

أثبت أنه إذا كان العدد المركب $Z \neq 1$ طويلته $|Z| = 1$

أنه:

$$\frac{2}{1 - Z} = 1 + i\cot(\frac{x}{2})$$

$(0 < \alpha < 2\pi)$

$\cot x \;]0, \pi[$

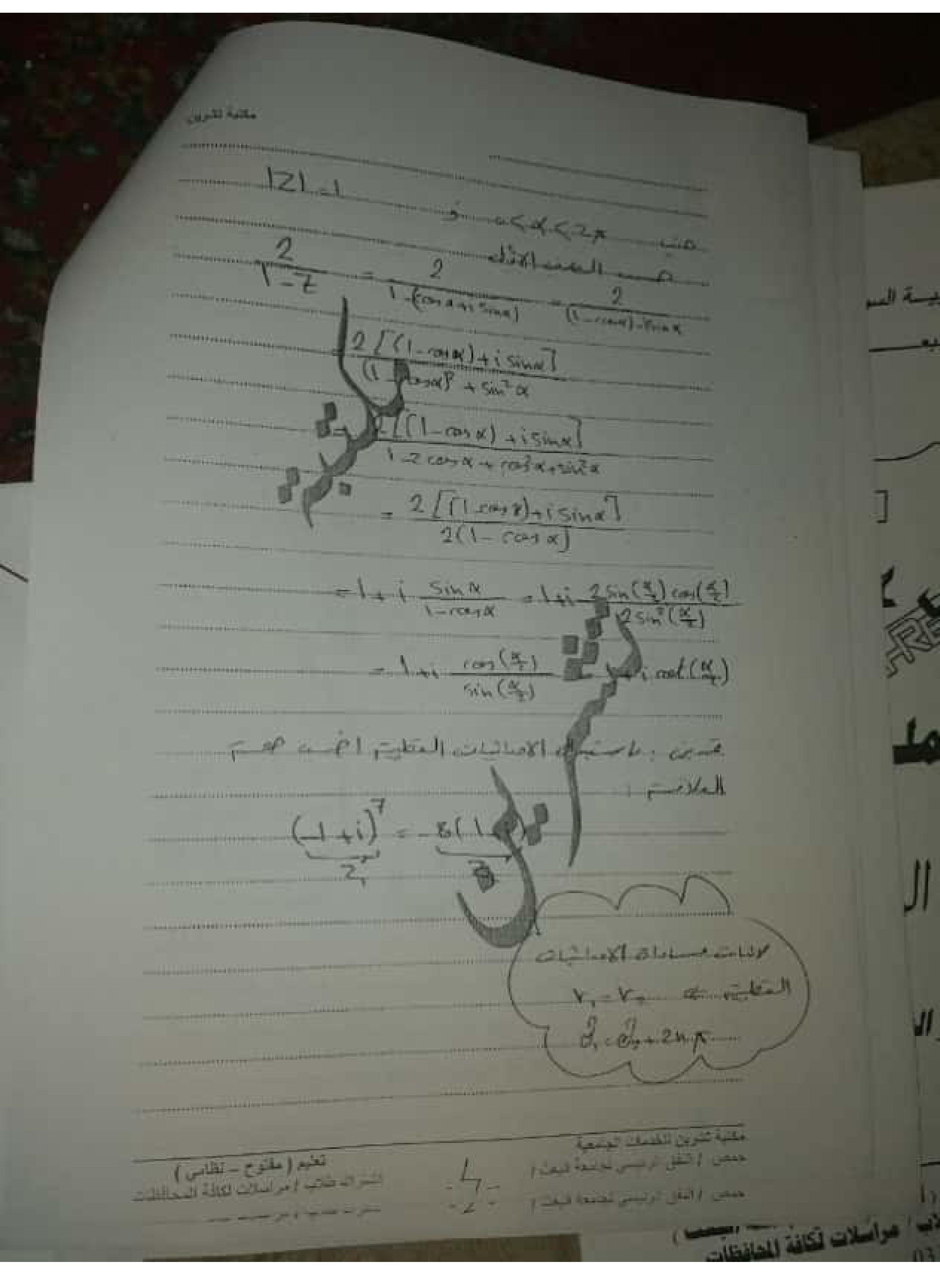
$\tan x \;]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

الحل:

بما أن $Z \neq 1$ و $|Z| = 1$ فإن الشكل المثلثي

نفرض الشكل

$$Z = \cos\alpha + i\sin\alpha$$



$|z| = 1$

و $0 < \alpha < 2\pi$

حيث

ح العدد الأول

$$\frac{2}{1-z} = \frac{2}{1-(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \frac{2}{(1-\cos\alpha) - i\sin\alpha}$$

$$= \frac{2[(1-\cos\alpha) + i\sin\alpha]}{(1-\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha}$$

$$= \frac{2[(1-\cos\alpha) + i\sin\alpha]}{1 - 2\cos\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha}$$

$$= \frac{2[(1-\cos\alpha) + i\sin\alpha]}{2(1-\cos\alpha)}$$

$$= 1 + i\,\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = 1 + i\,\frac{2\sin(\frac{\alpha}{2})\cos(\frac{\alpha}{2})}{2\sin^2(\frac{\alpha}{2})}$$

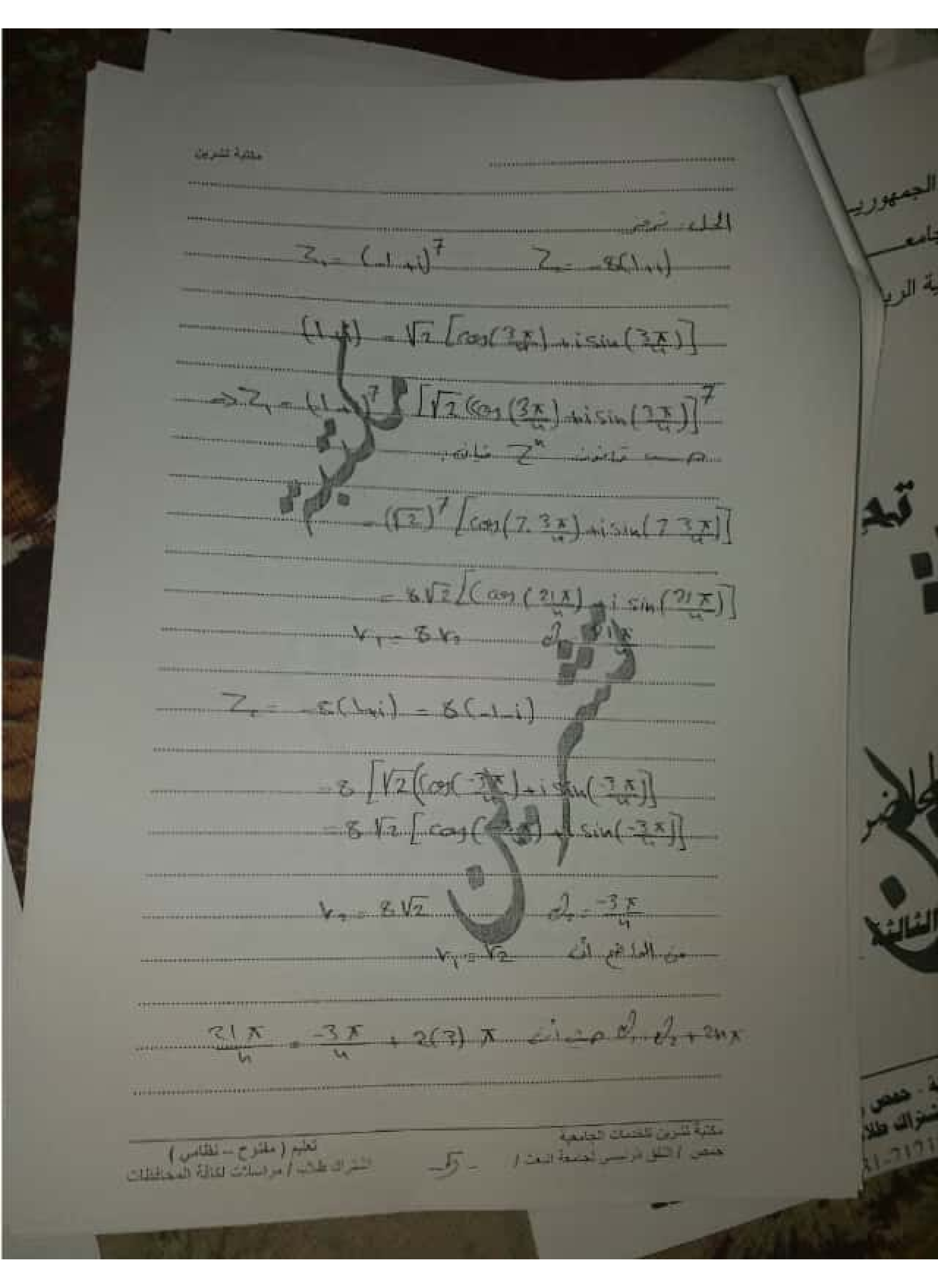
$$= 1 + i\,\frac{\cos(\frac{\alpha}{2})}{\sin(\frac{\alpha}{2})} = 1 + i\cot(\frac{\alpha}{2})$$

تمرين: باستخدام الإمثاليات المثلثية أثبت صحة العلاقة:

$$\underbrace{(-1+i)^7}_{z_1} = \underbrace{-8(1+i)}_{z_2}$$

لإثبات مساواة الإمثاليات المثلثية يجب $r_1 = r_2$

$\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$



الحل: نوجد

$Z_1 = (-1+i)^7$ $\quad Z_2 = -8(1+i)$

$(-1+i) = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]$

$\Rightarrow Z_1 = (-1+i)^7 = \left[\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)\right]^7$

من مبرهنة Z^n ديموافر

$= (\sqrt{2})^7\left[\cos\left(7 \cdot \frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(7 \cdot \frac{3\pi}{4}\right)\right]$

$= 8\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{21\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{21\pi}{4}\right)\right]$

$r_1 = 8r_2 \qquad \theta_1 = \frac{21\pi}{4}$

$Z_2 = -8(1+i) = 8(-1-i)$

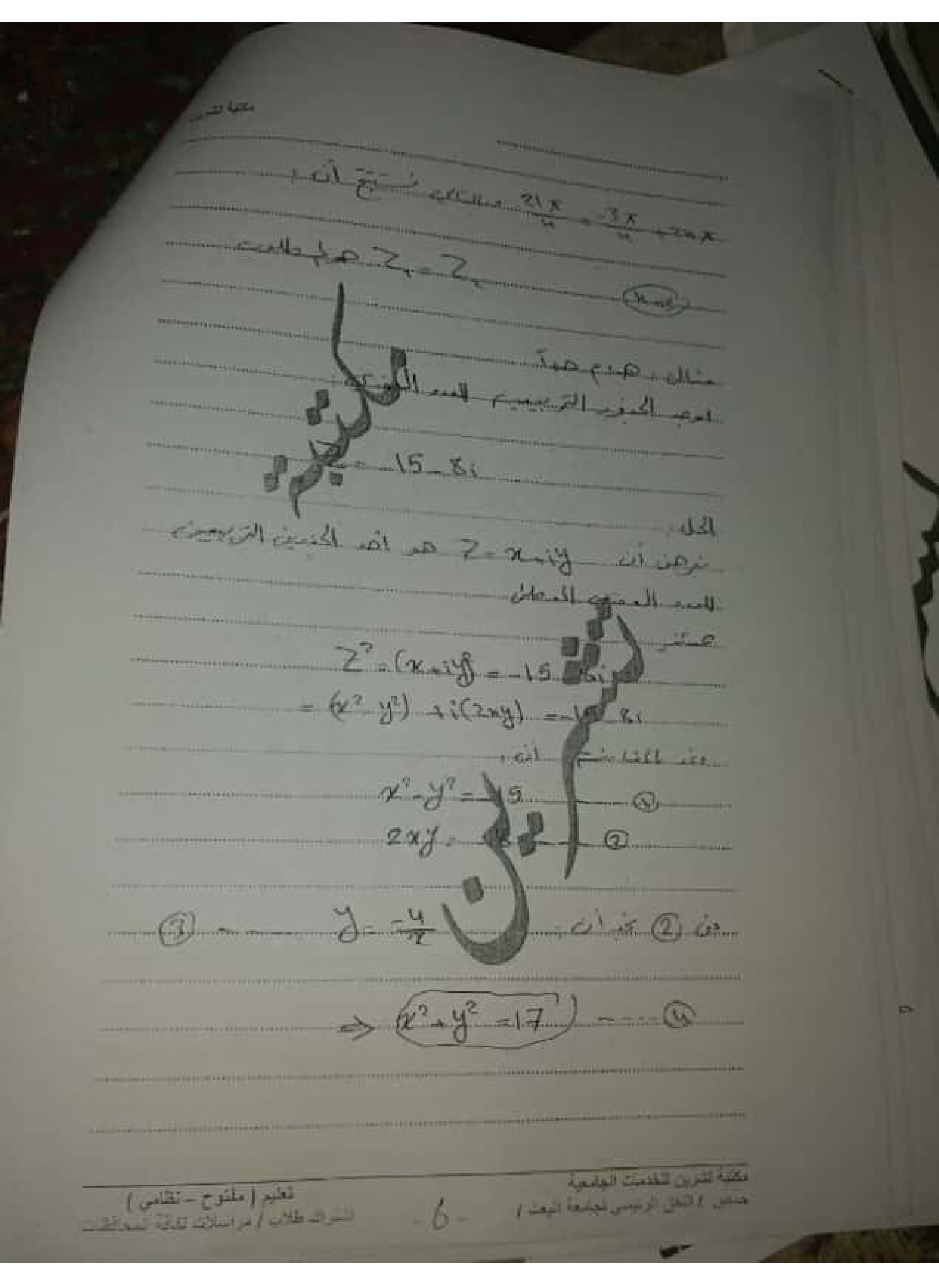
$= 8\left[\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-3\pi}{4}\right)\right)\right]$

$= 8\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{-3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-3\pi}{4}\right)\right]$

$r_2 = 8\sqrt{2} \qquad \theta_2 = \frac{-3\pi}{4}$

من الواضح أن $r_1 = \sqrt{2}$

$\frac{21\pi}{4} = \frac{-3\pi}{4} + 2(3)\pi$ [illegible] $\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$



$x = \frac{3\pi}{4} , \frac{7\pi}{4}$ وبالتالي نستنتج أن :

$Z_2 = -Z_1$ وهو المطلوب

(انتهى)

مثال : هذه هامة

أوجد الجذور التربيعية للعدد العقدي

$-15-8i$

الحل : نفرض أن $Z = x+iy$ هو أحد الجذرين التربيعيين للعدد العقدي المعطى

عندئذٍ

$Z^2 = (x+iy)^2 = -15-8i$

$= (x^2-y^2) + i(2xy) = -15-8i$

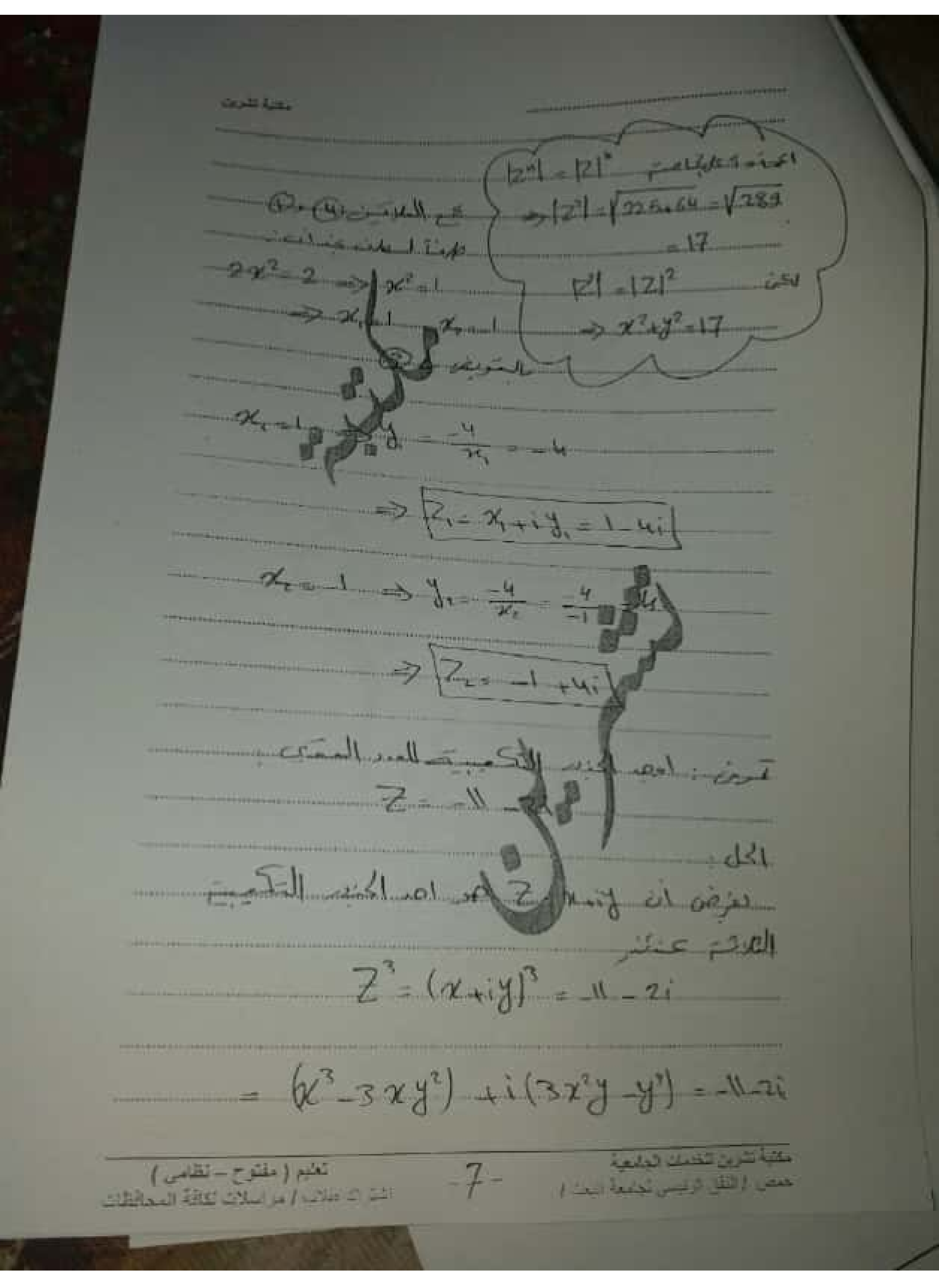
وبالمطابقة نجد أن :

$x^2 - y^2 = -15$ ...... (1)

$2xy = -8$ ...... (2)

من (2) نجد أن : $y = \frac{-4}{x}$ ...... (3)

$\Rightarrow x^2 + y^2 = 17$ ...... (4)



نجد أن: $|z^2| = |z|^2$

$\Rightarrow |z^2| = \sqrt{225+64} = \sqrt{289}$

$= 17$

لكن $|z^2| = |z|^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = 17$

بجمع المعادلتين (4) و (2)

نجد أن المعادلة

$2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1$

$\Rightarrow x_1 = 1 \quad x_2 = -1$

بالتعويض

$x_1 = 1 \Rightarrow y_1 = \frac{-4}{x_1} = -4$

$$\Rightarrow \boxed{z_1 = x_1 + iy_1 = 1 - 4i}$$

$x_2 = -1 \Rightarrow y_2 = \frac{-4}{x_2} = \frac{-4}{-1} = 4$

$$\Rightarrow \boxed{z_2 = -1 + 4i}$$

تمرين: أوجد الجذور التكعيبية للعدد العقدي

$z = -11 - 2i$

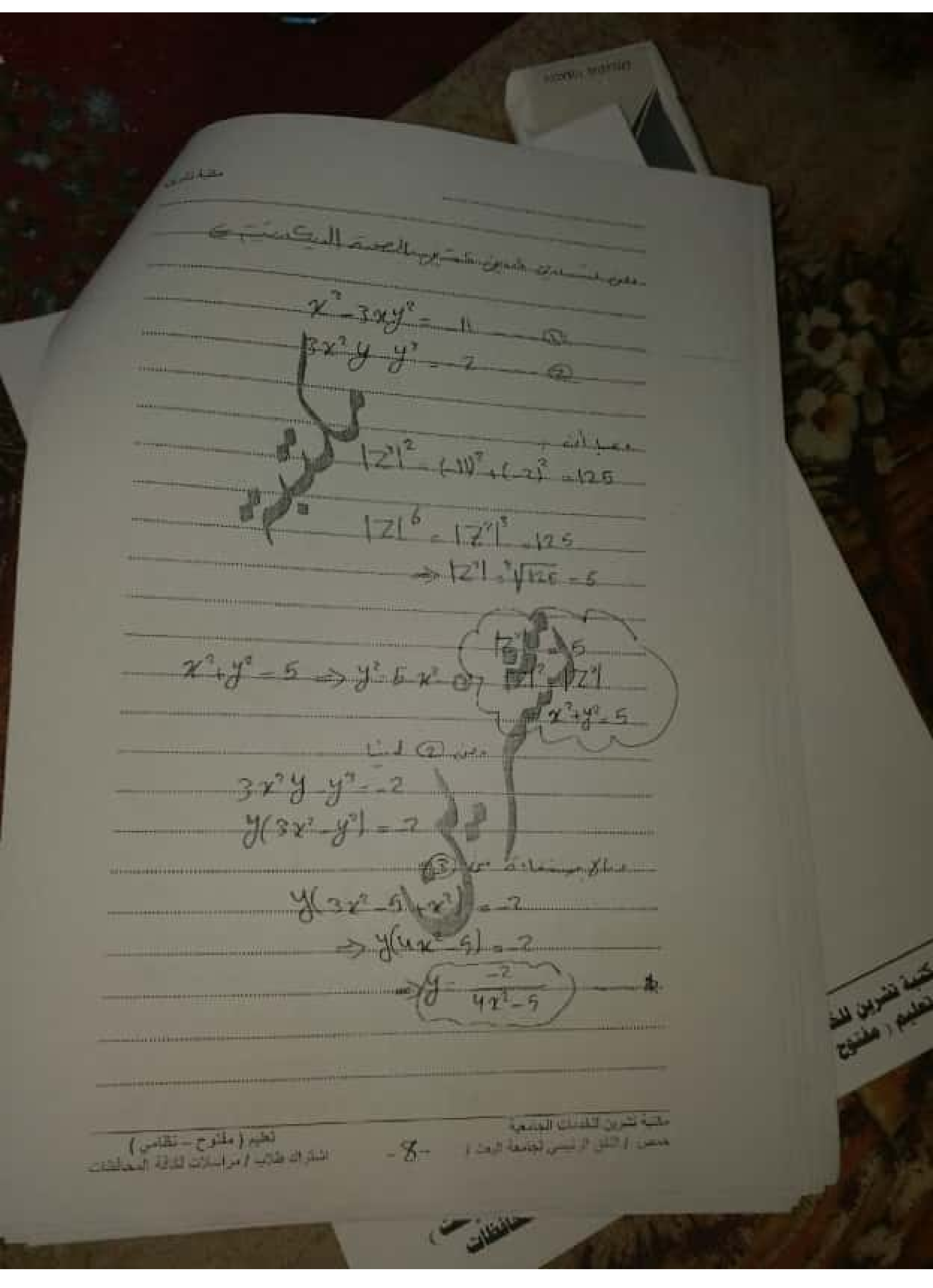
الحل:

نفرض أن $x+iy$ هو أحد الجذور التكعيبية

للعدد عندئذ

$$z^3 = (x+iy)^3 = -11 - 2i$$

$$= (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3) = -11 - 2i$$



[illegible]

$$x^3 - 3xy^2 = 11 \quad (1)$$

$$3x^2y - y^3 = -2 \quad (2)$$

[illegible]

$$|z'|^2 = (11)^2 + (-2)^2 = 125$$

$$|z|^6 = |z'|^3 = 125$$

$$\Rightarrow |z'| = \sqrt[3]{125} = 5$$

$$|z'| = 5$$

$$|z|^2 = |z'|$$

$$x^2 + y^2 = 5$$

$$x^2 + y^2 = 5 \Rightarrow y^2 = 5 - x^2 \quad (3)$$

[illegible] (2)

$$3x^2y - y^3 = -2$$

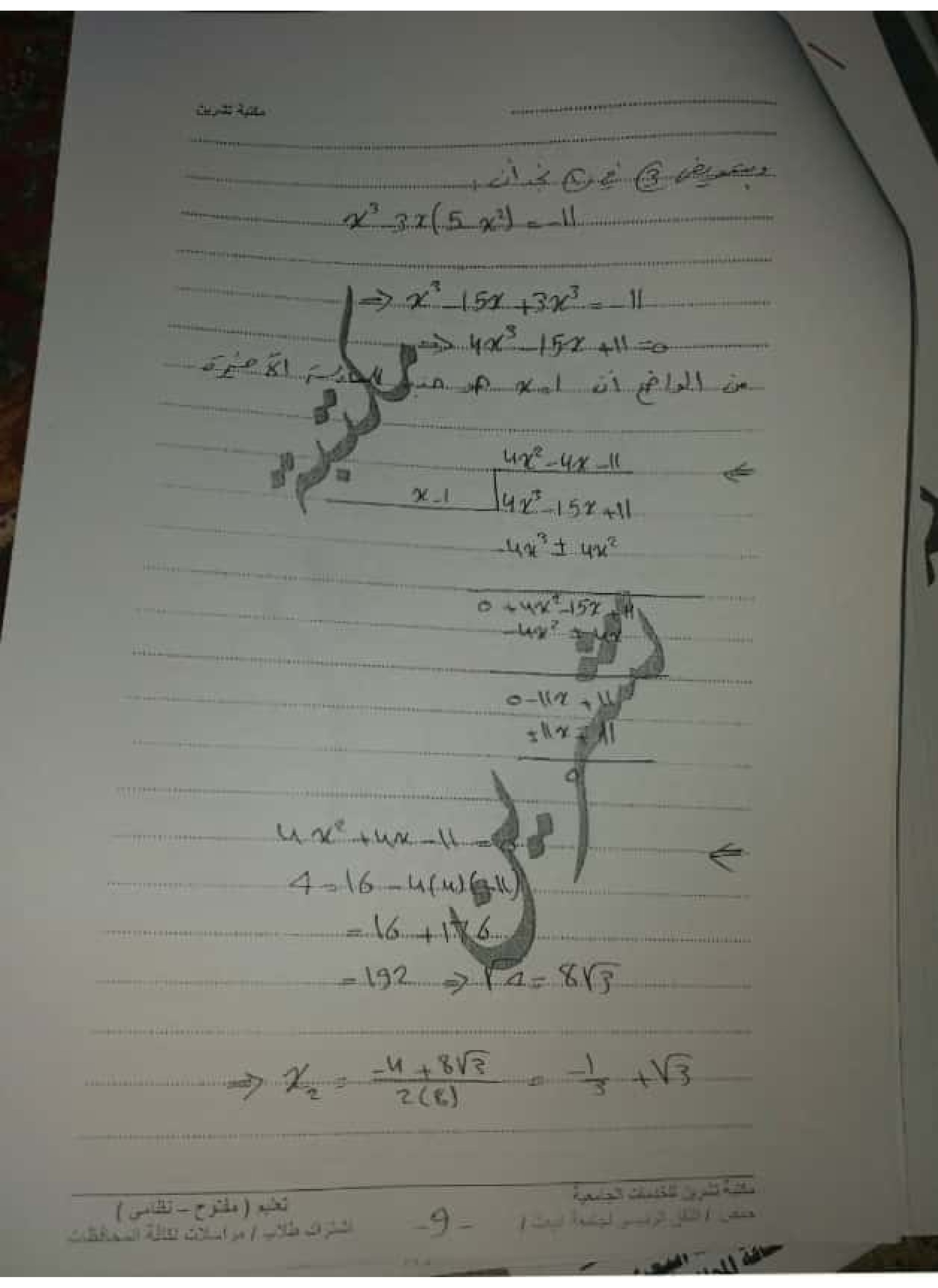
$$y(3x^2 - y^2) = -2$$

[illegible] (3)

$$y(3x^2 - 5 + x^2) = -2$$

$$\Rightarrow y(4x^2 - 5) = -2$$

$$\Rightarrow y = \frac{-2}{4x^2 - 5} \quad (4)$$



وبتعويض ③ في ② نجد أن

$x^3 - 3x(5 - x^2) = -11$

$\Rightarrow x^3 - 15x + 3x^3 = -11$

$\Rightarrow 4x^3 - 15x + 11 = 0$

من الواضح أن 1 هو جذر للمعادلة الأخيرة

$$\begin{array}{r|l} & 4x^2 - 4x - 11 \\ x - 1 & 4x^3 - 15x + 11 \\ & -4x^3 \pm 4x^2 \\ \hline & 0 + 4x^2 - 15x + 11 \\ & -4x^2 \pm 4x \\ \hline & 0 - 11x + 11 \\ & \pm 11x \mp 11 \\ \hline & 0 \end{array}$$

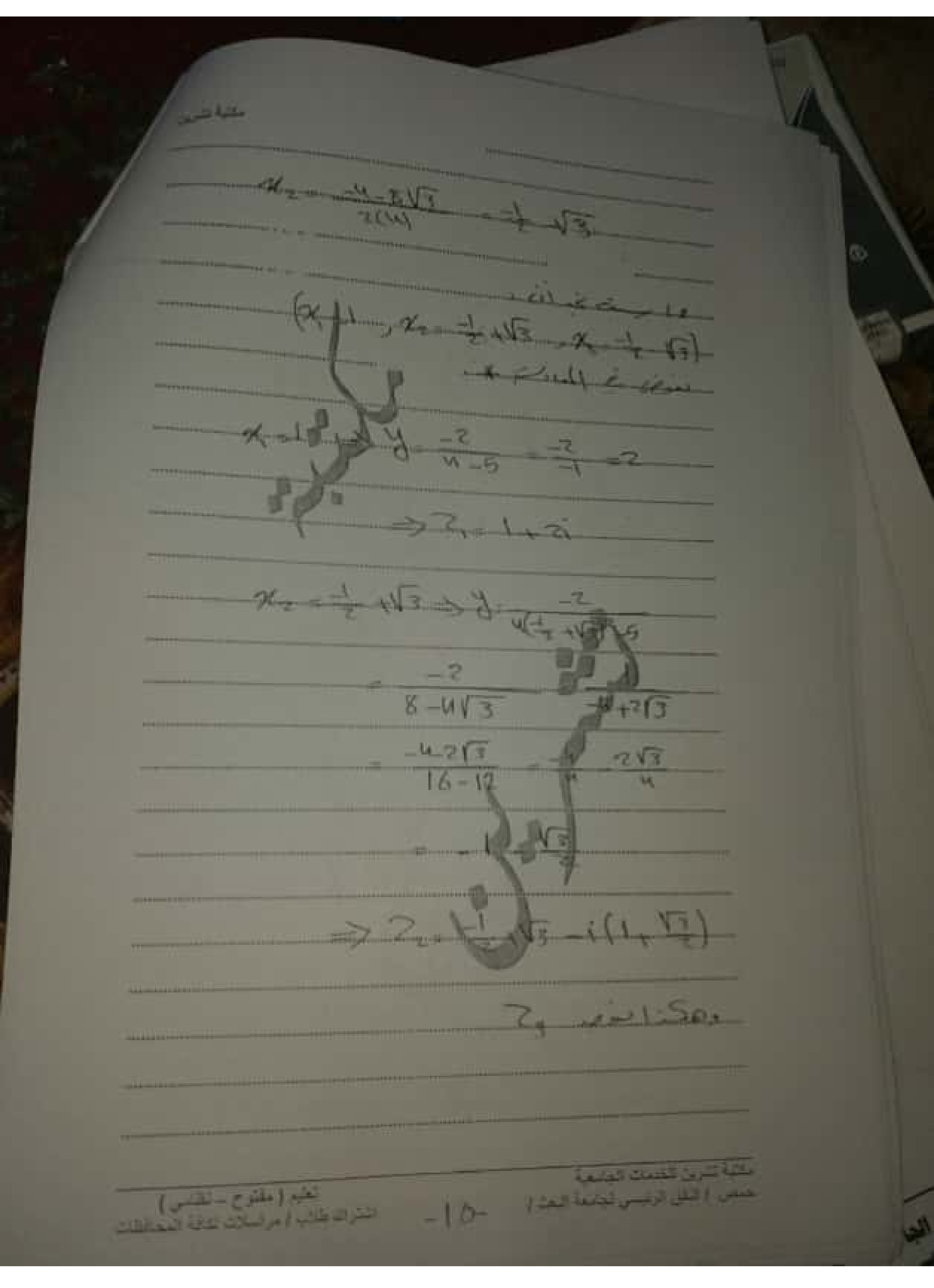
$4x^2 + 4x - 11 = 0$

$\Delta = 16 - 4(4)(-11)$

$= 16 + 176$

$= 192 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 8\sqrt{3}$

$\Rightarrow x_2 = \frac{-4 + 8\sqrt{3}}{2(8)} = -\frac{1}{2} + \sqrt{3}$



$x_2 = \frac{-4 - 2\sqrt{3}}{2(4)} = -\frac{1}{2} - \sqrt{3}$

لما سبق فإن

$\left(x_1 = 1 ,\ x_2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{3} ,\ x_3 = -\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right)$

نعوض في المعادلة *

$x = 1 \Rightarrow y = \frac{-2}{4 - 5} = \frac{-2}{-1} = 2$

$\Rightarrow z_1 = 1 + 2i$

$x_2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{3} \Rightarrow y = \frac{-2}{4\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{3}\right)^2 - 5}$

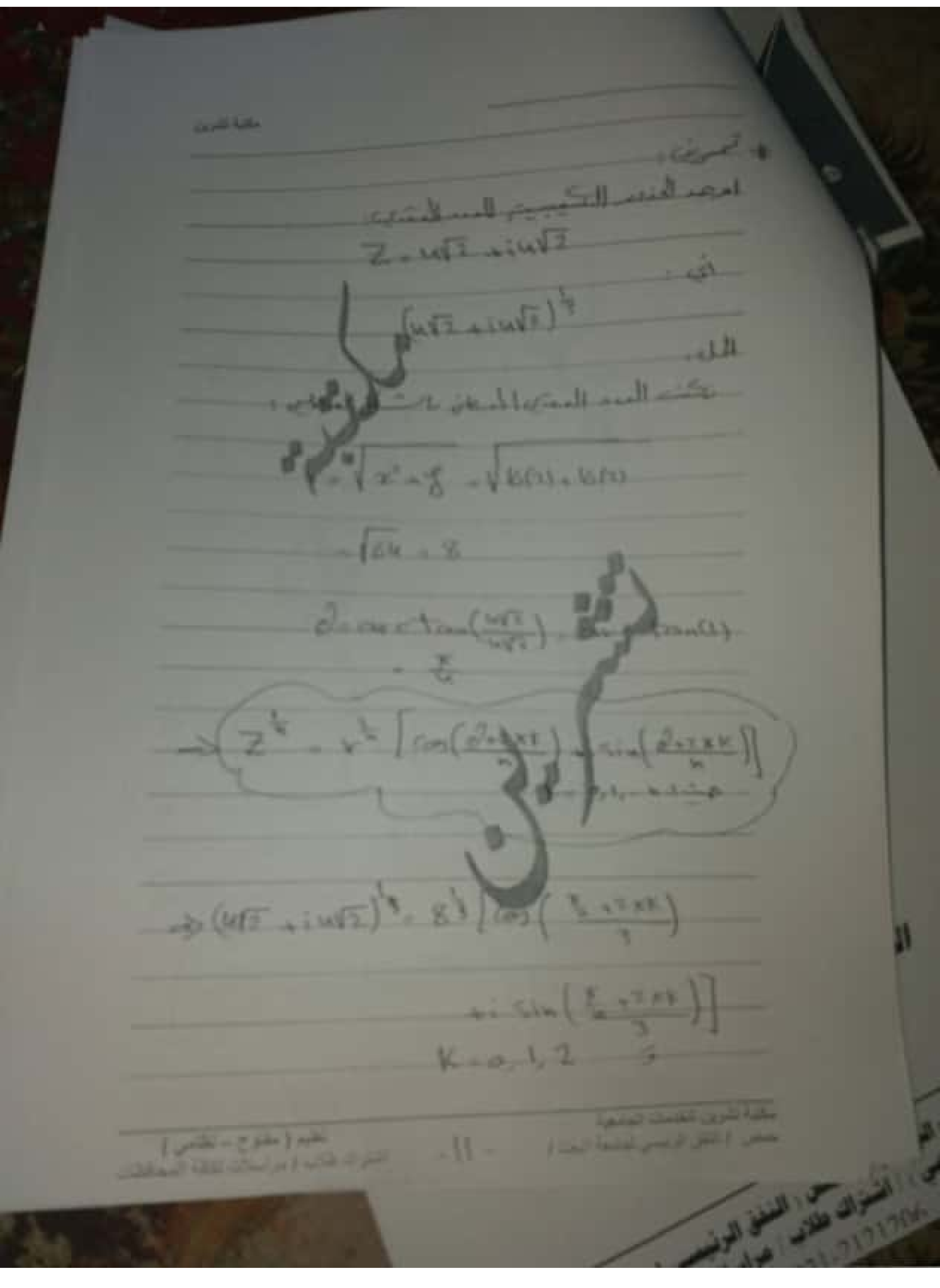
$= \frac{-2}{8 - 4\sqrt{3}} \cdot \frac{-4 + 2\sqrt{3}}{}$

$= \frac{-4 - 2\sqrt{3}}{16 - 12} = -\frac{4}{4} - \frac{2\sqrt{3}}{4}$

$= -1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow z_2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{3} - i\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

وهكذا نعين z_4



تمرين:

اوجد الجذر التكعيبي للعدد المركب

$Z = 4\sqrt{2} + i4\sqrt{2}$

أي:

$(4\sqrt{2} + i4\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}$

الحل:

نكتب العدد المركب في الصورة القطبية:

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{16(2) + 16(2)}$

$= \sqrt{64} = 8$

$\theta = \arctan\left(\frac{4\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}\right) = \arctan(1)$

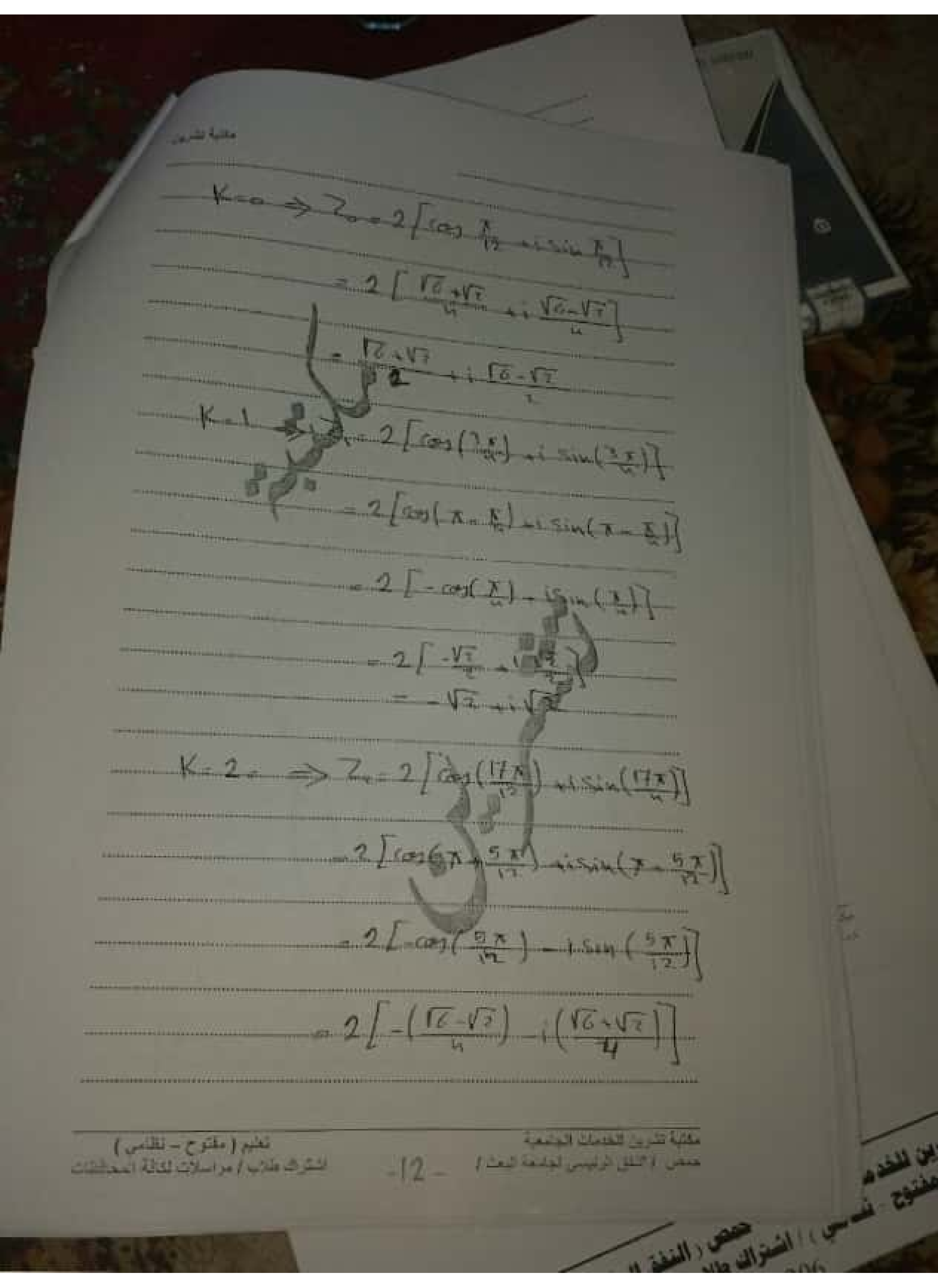
$= \frac{\pi}{4}$

$\rightarrow Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)\right]$

حيث $k = 0, 1, \ldots, n-1$

$\Rightarrow (4\sqrt{2} + i4\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}}\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{3}\right)\right]$

$k = 0, 1, 2$



$k=0 \Rightarrow Z_0 = 2\left[\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right]$

$= 2\left[\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\,\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right]$

$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

$k=1 \Rightarrow Z_1 = 2\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]$

$= 2\left[\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right]$

$= 2\left[-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$= 2\left[-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

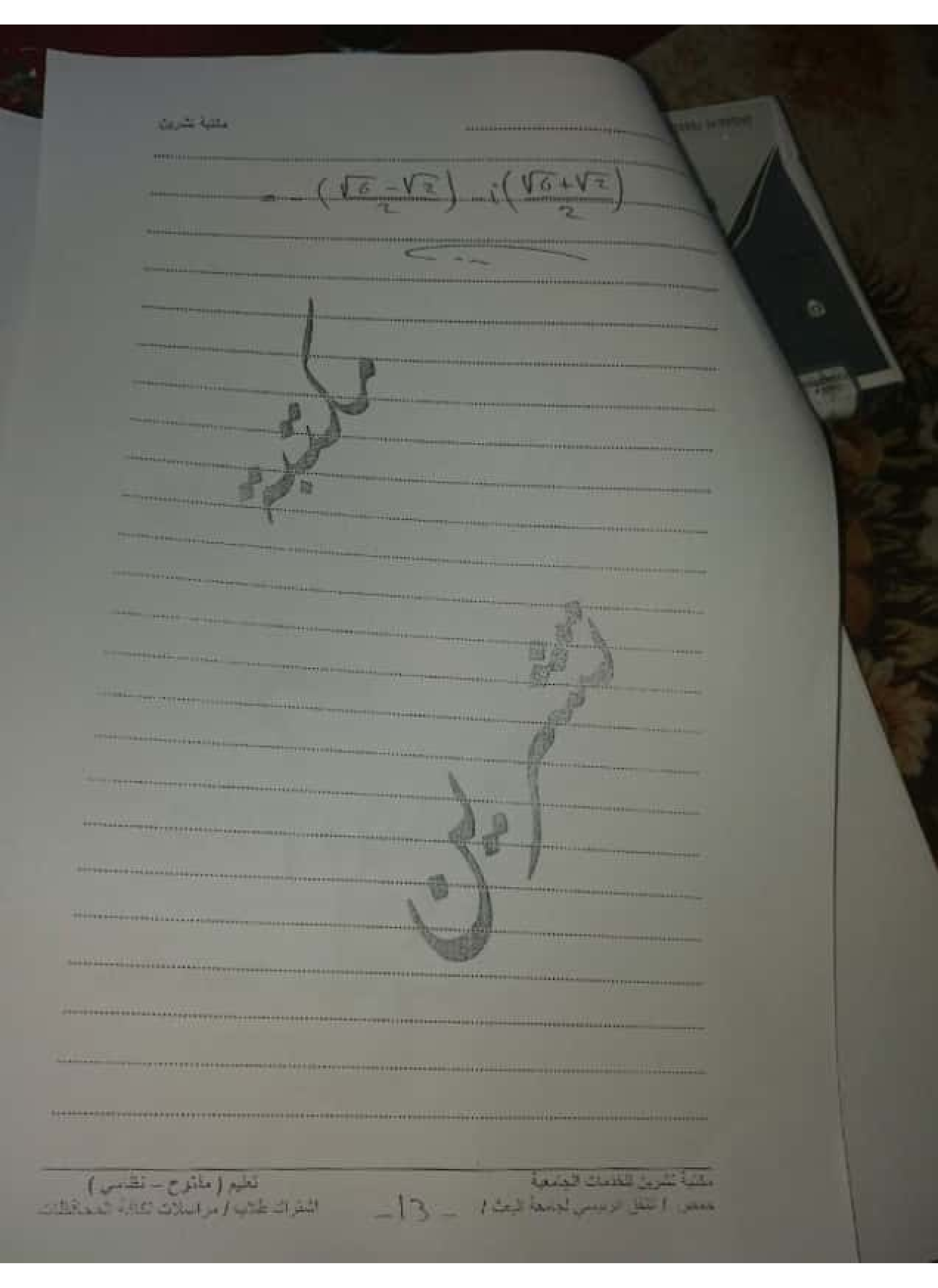
$= -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$

$k=2 \Rightarrow Z_2 = 2\left[\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right]$

$= 2\left[\cos\left(\pi + \frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{5\pi}{12}\right)\right]$

$= 2\left[-\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) - i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right]$

$= 2\left[-\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) - i\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)\right]$



$\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right) \; i\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)$